

Keistimewaan Hubungan antara Barisan Geometri, Deret Aritmatik, dan Pangkat

Riyanto (Dosen pada Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP Unib)

BERDASARKAN hasil penelaahan yang dilakukan oleh Riyanto (1995) ditemukan bahwa barisan geometri, deret aritmatik, dan pangkat saling berhubungan. Selisih bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $Un = n^2$ selalu ajeg. Beda yang ajeg itu merupakan salah satu dari barisan aritmatik. Ciri lain barisan aritmatik adalah besar-beda harus sama. Untuk barisan geometri dengan n^1 memiliki besar beda antar-suku-bilangan sama. Besar beda antar-suku-bilangan yang sama dapat diperoleh dengan cara mengurangi suku-bilangan berurutan secara terus menerus sebanyak besar pangkat. Untuk barisan geometri dengan n^2 , besar beda antar-suku-bilangan yang sama dapat diperoleh dengan cara mengurangi suku-bilangan berurutan secara terus menerus sebanyak x kali. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ada korelasi antara besarnya pangkat dari barisan geometri ($Un = n^2$) dengan tahap selisih suku-bilangan berurutan dari barisan geometri tersebut. Contoh: Jika barisan geometri mempunyai $Un = n^1$ maka urutan bilangan

barisan geometri tersebut merupakan suatu bentuk barisan aritmatik. Untuk barisan geometri dengan $Un = n^1$, beda suku bilangan berurutan dari barisan geometri pada tahap kedua merupakan barisan aritmatik. Demikian juga untuk barisan geometri dengan $Un = n^2$. Kaidah ini berlaku sampai dengan barisan geometri dengan $Un = n^2$. Beda bilangan berurutan dari barisan geometri pada tahap ke (x) merupakan barisan aritmatik.

Untuk memudahkan pemahaman uraian di atas, secara berturut-turut disajikan beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri yang memiliki $Un = n^1$, $Un = n^2$, $Un = n^3$, dan $Un = n^4$.

Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $Un = n^1$

Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $Un = n^2$

Beda suku-bilangan berurutan dari

barisan geometri dengan $Un = n^1$

$$\begin{aligned} b &= n^1 - (n-1)^1 \\ &= 3n^1 - 3n + 1 \\ b' &= \{(3n^1 - 3n + 1) - \\ &\{3(n-1)^1 - 3(n-1) + 1\} \} = \\ 6n - 6 \\ b'' &= \{(6n - 6) - \\ &\{6(n-1) - 6\} = 6 \end{aligned}$$

Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $Un = n^2$

$$\begin{aligned} b &= n^2 - (n-1)^2 = 4n^1 - 6n + 1 \\ 4n - 1 \\ b' &= (4n^1 - 6n + 1) - \\ &\{4(n-1)^1 - 6(n-1) + 1\} = \\ 1) \quad b'' &= (12n^1 - 12n + 4 - \\ &\{12(n-1)^1 - 12(n-1) + 4\} = \\ 14 \quad b''' &= 12n^1 - 24n + 14 - \\ &\{12(n-1)^1 - 24(n-1) + 14\} = \\ 24n - 36 \\ b'''' &= (24n - 36) - (24(n-1) - 36) = 24 \end{aligned}$$

Beda suku-bilangan berurutan dari barisan geometri dengan $Un = n^3$

$$\begin{aligned} b &= n^3 - (n-1)^3 = 5n^2 - \\ &10n^1 + 10n^0 - 5n + 1 \\ b' &= (5n^2 - 10n^1 + 10n^0 - 5n + 1) - \\ &\{5(n-1)^2 - 10(n-1)^1 + 10(n-1)^0 - 5(n-1) + 1\} = \\ &= 20n^2 - 30n^1 + 20n^0 - 5 - \\ &\{30n^1 - 30n + 10\} + 20n - 30 \\ &- 5 = 20n^2 - 60n^1 + 70n - 30 \\ b'' &= (20n^2 - 60n^1 + 70n - 30) - \\ &\{20(n-1)^2 - 60(n-1)^1 + 70(n-1)^0 - 30\} = \\ &= 60n^2 - 60n + 20 - (120n - 60) + \\ &70 = 60n^2 - 180n + 150 \\ b''' &= 60n^2 - 180n + 150 - (60(n-1)^2 \\ &- 180(n-1) + 150) = 120n - 60 - 180 = \\ &120n - 240 \\ b'''' &= 120n - 240 - (120(n-1) - 240) = 120 \end{aligned}$$

Keistimewaan dari hubungan antar-rumusan

Berdasarkan pada kajian hubungan antar-rumusan barisan, deret, dan pangkat ditemukan beberapa keistimewaan, yaitu 1) keteraturan besar beda (b), 2) adanya hubungan antara deret aritmatik dengan bilangan pangkat dua (kuadrat); 3) dapat digunakan untuk menghitung kuadrat dengan cepat, dan 4) menghitung deret aritmatik ($Sn(a)$) dengan cepat. Berikut ini akan dipaparkan keempat keistimewaan tersebut.

Keterangan besar beda (b)
Beda suku-bilangan yang berurutan pada tahap terakhir dari barisan

geometri dengan $Un = n^2$ memiliki besar yang teratur. Besar beda tahap terakhir pada barisan geometri tersebut sama dengan "jumlah hasil kali dari besarnya pangkat".

Secara ringkas, beda tahap akhir dari barisan geometri dengan $Un = n^2$ dapat dicari dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} \text{Jika } Un = n^1 \text{ maka } b1 &= 1 & \times 2 \\ &= 1 \times 2 = 2 \\ \text{Jika } Un = n^2 \text{ maka } b2 &= 2 & \times 3 \\ &= 1 \times 2 \times 3 = 6 \\ \text{Jika } Un = n^3 \text{ maka } b3 &= 6 & \times 4 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \\ \text{Jika } Un = n^4 \text{ maka } b4 &= 24 & \times 5 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \\ \text{Jika } Un = n^5 \text{ maka } b5 &= 120 & \times 6 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \\ \text{Jika } Un = n^6 \text{ maka } b6 &= 720 & \times 7 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040 \end{aligned}$$

Dengan keterangan ini dapat ditebak berapa beda tahap akhir suku-bilangan yang berurutan (b) dari barisan geometri dengan $Un = n^2$. Untuk menebaknya dapat digunakan rumus $bn = n!$ karena $b1 = 1$ dan bn merupakan jumlah perkalian dari besarnya pangkat. Dengan demikian, besarnya beda tahap akhir dapat dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned} b5 &= 5.4.3.2.1 = 120 \\ b6 &= 6.5.4.3.2.1 = 720 \\ b10 &= 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = \\ &3628800 \end{aligned}$$

Hubungan antara deret aritmatik dengan bilangan pangkat dua (kuadrat)

Dalam kajian selanjutnya ada tiga notasi yang jika tidak diperhatikan dapat membingungkan. Ketiga notasi tersebut adalah $Un(g)$ = barisan geometri, $Sn(a)$ = deret aritmatik, dan $Un(a)$ = barisan aritmatik.

Beda suku bilangan berurutan pada barisan geometri dengan $Un(g) = n^2$ merupakan barisan aritmatik yang mempunyai $a = 1$ dan $b = 2$. Deret aritmatik adalah jumlah suku-suku bilangan barisan geometri itu sama dengan hasil kuadrat ($Un(g) = n^2$). Karena itu, barisan aritmatik yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$, jumlah suku ke n = $Sn(a) = n^2$ atau $Un(g) = Sn(a) = n^2$. Dengan demikian, $Sn(a)$ dari suatu barisan yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$, dapat dihitung dengan cara mengkuadratkan suku-bilangan yang dicari. Sebaliknya jika akan mencari hasil kuadrat dari suatu bilangan dapat dicari dengan menggunakan rumus $Sn(a)$.

Menghitung kuadrat dengan cepat

Berdasarkan uraian di atas, untuk menghitung hasil kuadrat dari suatu bilangan dapat digunakan 2 cara, yaitu: 1) persamaan $n^2 = (n-1)^2 + 2n-1$. Keunggulan cara ini yaitu lebih cepat dalam menghitung jika hasil kuadrat dari bilangan di depannya sudah diketahui atau sudah diketahui.

Bagi kita tentu sudah hafal hasil kuadrat dari bilangan, seperti $5^2 = 25$, $10^2 = 100$, $15^2 = 225$, $25^2 = 625$, $100^2 = 10000$, dan seterusnya. Karena itu, dengan mudah dapat dihitung hasil kuadrat dari 6^2 , 11^2 , 16^2 , 26^2 , 51^2 dan 101^2 . Penghitungan cara ini sangat membantu perhitungan kuadrat angka besar tanpa kalkulator.

Contoh
1. Jika $n = 26$, maka $26^2 = 676$ berasal dari

$$\begin{aligned} n^2 &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ 26^2 &= 25^2 + 2.26 - 1 \\ 26^2 &= 625 + 51 = 676. \end{aligned}$$

2. Jika $n = 51$ maka $51^2 = 2500 + 2.25 - 1 = 2500 + 101 = 2601$

3. Jika $n = 101$ maka $101^2 = 10000 + 201 = 10201$

Menghitung deret aritmatik ($Sn(a)$) dengan cepat

Untuk menghitung besarnya deret aritmatik ($Sn(a)$) dari suatu barisan aritmatik yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$ dapat digunakan persamaan $Sn(a) = n^2$.

Contoh
1. Carilah besar jumlah suku ($Sn(a)$) ke 15, ke 21, dan ke 225 pada suatu barisan yang memiliki $a = 1$ dan $b = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Jawab} \\ S15(a) &= 15^2 = 225 \\ S21(a) &= 21^2 = 441 \\ S225(a) &= 225^2 = 50625 \end{aligned}$$

Beberapa keistimewaan dari hubungan antara barisan geometri, deret aritmatik, dan pangkat adalah 1) keteraturan besar beda, 2) adanya hubungan antara deret aritmatik dengan bilangan pangkat dua (kuadrat); 3) dapat digunakan untuk menghitung kuadrat dengan cepat, dan 4) menghitung deret aritmatik ($Sn(a)$) dengan cepat

Sumber Pustaka
Riyanto. 1995. Hubungan antara barisan geometri ($Un = n^2$), deret aritmatik, dan pangkat. Jurnal Pendidikan Humaniora dan sains, tahun 1, nomor 2, April 1995. Hal. 12-23.