

PEMBUKTIAN DERET PANGKAT DUA ($\sum_{i=1}^n i^2$)

Riyanto

Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP Universitas Bengkulu
email: riyanto_unib@yahoo.com

Abstrak. Pangkat, barisan pangkat, dan deret aritmatik ternyata saling berhubungan. Selisih bilangan berurutan dari barisan pangkat ($U_n = n^x$) selalu ajeg. Besar beda yang sama antarsuku-bilangan dapat diperoleh dengan cara mengurangi suku-bilangan berurutan dari deret pangkat secara terus menerus sebanyak besar pangkat dikurang satu ($x - 1$). Berdasarkan pernyataan

tersebut, dapatkah deret pangkat dua ($\sum_{i=1}^n i^2$) dibuktikan melalui deret aritmatik? Jika dapat,

bagaimanakah cara untuk membuktikan $\sum_{i=1}^n i^2$. Berdasarkan hasil pembuktian, deret pangkat

$\sum_{i=1}^n i^2$ dapat dibuktikan dengan menggunakan pembuktian deret aritmatik.

Kata Kunci: Deret, pangkat, aritmatik

1. PENDAHULUAN

Menurut Riyanto [1] pangkat, barisan pangkat, dan deret aritmatik saling berhubungan. Selisih bilangan berurutan dari barisan pangkat dengan $U_n = n^x$ selalu ajeg. Beda yang ajeg itu merupakan salah satu ciri dari barisan aritmatik. Ciri lain barisan aritmatik adalah besar beda harus sama. Besar beda yang sama antarsuku-bilangan dapat diperoleh dengan cara mengurangi suku-bilangan berurutan dari deret pangkat secara terus menerus sebanyak besar pangkat dikurang satu ($x - 1$). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ada korelasi antara besarnya pangkat dari barisan pangkat ($U_n = n^x$) dengan tahap selisih suku-bilangan berurutan dari barisan pangkat yang merupakan bentuk suatu barisan aritmatik. Berdasarkan pernyataan

tersebut, dapatkah deret pangkat ($\sum_{i=1}^n i^2$) dibuktikan melalui deret aritmatik? Rumus untuk

menghitung deret aritmatik untuk $\sum_{i=1}^n i$ sudah ditemukan, yaitu $S_n = \sum_{i=1}^n i = (n^2+n)/2$.

Pertanyaan penelitian ini adalah bagaimanakah cara membuktikan $\sum_{i=1}^n i^2 = 1/6(2n^3 + 3n^2 + n)$?

2. PEMECAHAN

Riyanto [1] mengemukakan bahwa barisan aritmatik merupakan suatu barisan yang mempunyai beda di antara dua suku yang berurutan selalu ajeg dan memiliki besar beda yang sama. Deret aritmatik adalah jumlah aljabar dari suku-suku suatu barisan aritmatik. Pembuktian dimulai

dari penyajian rumus untuk menghitung deret aritmatik $\sum_{i=1}^n i$ dilanjutkan dengan pembuktian

$$\sum_{i=1}^n i^2.$$

2.1 Deret Bilangan Pangkat 1

Berikut disajikan persamaan jumlah sampai dengan suku ke n (S_n) dari bilangan berurutan dengan beda (b) = 1 dan suku awal (a) = 1.

$$\begin{aligned} 2.1a. & 1 = 1 \\ 2.1b. & 1 + 2 = 3 \\ 2.1c. & 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2.1d. & 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ 2.1e. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\ 2.1f. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \\ 2.1g. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 \\ 2.1h. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 \\ 2.1i. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \\ 2.1j. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 \\ 2.1k. & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + n = (n^2 + n)/2 \end{aligned}$$

Misal: 2, 6, 10, 14, 20,,, a_n

$$a_1 = 2 = a$$

$$a_2 = 6 = 2 + 4 = a + b$$

$$a_3 = 10 = 6 + 4 = (a + b) + b = a + 2b$$

$$a_4 = 14 = 10 + 4 = (a + 2b) + b = a + 3b$$

$$a_n = a + (n-1)b$$

Jadi rumus suku ke- n dalam barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a_n = a + (n-1)b$$

Keterangan:

$U_n = a_n$ = Suku ke- n

a_1 = suku pertama

b = beda antarsuku

n = banyaknya suku

2.2 Deret Aritmetika

Misal: $S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$

$$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a +$$

$$2 S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots \text{sebanyak } n$$

$$2 S_n = n(a + U_n)$$

$$2 S_n = n\{a + a + (n-1)b\}$$

$$S_n = n/2\{2a + (n-1)b\}$$

Jika $a = 1$ dan $b = 1$, maka

$$S_n = (n^2 + n)/2$$

Keterangan

S_n = Deret ke- n (jumlah sampai dengan suku ke- n)

3. DERET BILANGAN PANGKAT ($\sum_{i=1}^n i^2 = S_n^2$)

- 3a. $1^2 = 1$
 3b. $1^2 + 2^2 = 5$
 3c. $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
 3d. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
 3e. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$
 3f. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$
 3g. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$
 3h. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$

Ekspresi kanan pada persamaan 3a—3h diuraikan dalam 2 bagian, bagian pertama S_n barisan aritmatika dari ekspresi kiri dan bagian kedua $= S_n^2 - S_n$. Hasil bagian sebagai berikut.

- 4a. $1^2 = 1 = (1+0)$
 4b. $1^2 + 2^2 = 5 = (3 + 2)$
 4c. $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = (6+8)$
 4d. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = (10 + 20)$
 4e. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = (15 + 40)$
 4f. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91 = (21 + 70)$
 4g. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140 = (28 + 112)$
 4h. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204 = (36 + 168)$

Berdasarkan persamaan 4a—4h dapat diperoleh hasil bahwa bagian pertama merupakan S_n dari bilangan pangkat satu ekspresi kiri. Berikutnya adalah mencari suku dan deret pada bagian kedua dari ekspresi kanan (U_{n2} dan S_{n2}).

3.1 Menghitung U_{n2} dan S_{n2}

Jika $S_n^2 - S_n = S_{n2}$, maka S_{n2} dapat ditulis sebagai berikut: 0, 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, ... n. Jika suku berikutnya dikurangi dengan suku sebelumnya secara terus menerus maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$S_{n2}, U_{n2}, b_1, b_2,$
 0
 } 2
 2 } 4
 } 6 } 2
 8 } 6
 } 12 } 2
 20 } 8
 } 20 } 2
 40 } 10
 } 30 } 2
 70 } 12
 } 42 } 2
 112 } 14
 } 56
 168

Berdasarkan pola di atas dapat diketahui beda suku bilangan berurutan setiap tahapnya, sebagai berikut.

$$b_2 = 2$$

$$b_1 = 2n$$

$$U_n = n(n-1)$$

$$U_n = n^2 - n$$

3.2 Menghitung S_{n2}

$$\sum_{i=1}^n i^2 = S_{n1} \text{ dan } S_{n2}$$

Bilangan S_{n2} dapat diuraikan sebagai berikut.

$$5. \quad S_{n2} = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + \dots + n$$

$$5.a \quad S_{n2.1} = 0 = 0$$

$$5.b \quad S_{n2.2} = 0 + 2 = 2$$

$$5.c \quad S_{n2.3} = 0 + 2 + 6 = 8$$

$$5.d \quad S_{n2.4} = 0 + 2 + 6 + 12 = 20$$

$$5.e \quad S_{n2.5} = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 = 40$$

$$5.f \quad S_{n2.6} = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70$$

$$5.g \quad S_{n2.7} = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 = 112$$

$$5.h \quad S_{n2.8} = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 168$$

$$5.i \quad S_{n2.9} = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 = 240$$

Persamaan 5a—5i dapat disederhanakan, sebagai berikut.

$$6.a \quad S_{n2.1} = 0 = (1-1)0 - 0$$

$$6.b \quad S_{n2.2} = 2 = (2-1)2 - 2(0)$$

$$6.c \quad S_{n2.3} = 8 = (3-1)6 - 2(0 + 2)$$

$$6.d \quad S_{n2.4} = 20 = (4-1)12 - 2(0 + 2 + 6)$$

$$6.e \quad S_{n2.5} = 40 = (5-1).20 - 2(0 + 2 + 6 + 12)$$

$$6.f \quad S_{n2.6} = 70 = (6-1)30 - 2(0 + 2 + 6 + 12 + 20)$$

$$6.g \quad S_{n2.7} = 112 = (7-7)42 - 2(0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30)$$

$$6.h \quad S_{n2.8} = 168 = (8-1)56 - 2(0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42)$$

$$6.i \quad S_{n2.9} = 240 = (9-1)72 - 2(0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56)$$

Berdasarkan persamaan 6a—6i dapat disederhanakan, sebagai berikut.

$$S_{n2} = (n-1) U_{n2} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} U_{n2}$$

$U_n = (n^2 - n)$ karena $a = 0$, sehingga

$$S_{n2} = (n-1)(n^2 - n) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 - i)$$

Jadi,

$$\sum_{i=1}^n i^2 = (n^2 + n)/2 + \{ (n-1)(n^2 - n) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 - i) \}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = (n^2 + n)/2 + (n-1)(n^2 - n) - 2 \left(\sum_{i=1}^n (i^2 - i) - U_n \right)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = (n^2 + n)/2 + (n^3 - n^2 + n) - 2 \left(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i - U_n \right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n i^2 &= (n^2+n)/2 + (n^3 - n^2 + n) - 2 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i - 2(n^2 - n) \\
\sum_{i=1}^n i^2 &= (n^2+n)/2 + (n^3 - n^2 + n) - 2 \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i + 2n^2 - 2n \\
3 \sum_{i=1}^n i^2 &= (n^2+n)/2 + n^3 - 2n^2 + n + 2(n^2+n)/2 + 2n^2 - 2n \\
3 \sum_{i=1}^n i^2 &= 3(n^2+n)/2 + n^3 - 2n^2 + n + 2n^2 - 2n \\
3 \sum_{i=1}^n i^2 &= 3(n^2+n)/2 + n^3 - n \\
6 \sum_{i=1}^n i^2 &= 3n^2 + 3n + 2n^3 - 2n \\
6 \sum_{i=1}^n i^2 &= 3n^2 + 2n^3 + n \\
\sum_{i=1}^n i^2 &= 1/6(2n^3 + 3n^2 + n)
\end{aligned}$$

Contoh:

Hasil hitung S_n^2 untuk n, berikut ini.

1. $n = 10 = 2310$
2. $n = 24 = 4900 = 70^2$
3. $n = 25 = 5525$
4. $n = 50 = 42925$
5. $n = 100 = 383350$
6. $n = 200 = 2686700$
7. $n = 300 = 9045050$
8. $n = 400 = 21413400$
9. $n = 500 = 41791750$
10. $n = 1000 = 333.833.500$

Berdasarkan contoh di atas ditemukan persamaan kuadrat cantik, berikut.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + \dots + 24^2 = 70^2$$

4. SIMPULAN DAN SARAN

4.1 Simpulan

Berdasarkan pembuktian dengan deret aritmatik, dapat disimpulkan bahwa deret pangkat dua dapat dihitung dengan rumus: $S_n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = 1/6(2n^3 + 3n^2 + n)$. Selain itu, juga ditemukan persamaan kuadrat cantik untuk $n = 24$.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil kajian disarankan untuk melanjutkan pembuktian kajian deret pangkat 4, 5, hingga n .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Riyanto. (2008). Cara mudah mencari bilangan-bilangan Teorema Terakhir Fermat. *Prosiding Konggres dan Seminar Nasional Matematika*, Juli 2008; **XIV**; 113—120.