

Penyederhanaan Deret Pangkat Dua

Deret pangkat dua dapat dihitung dengan rumus, $S_n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n)/6$. Selain dengan rumus itu, deret pangkat dua dapat dihitung dengan banyak cara. Salah satu cara, deret pangkat dua dapat disederhanakan menjadi deret hitung, sebagai berikut.

Jika $a, b, c, d, \dots, x, y$, dan z merupakan bilangan rasional berurutan dengan beda 1, maka

$$a^2 + b^2 = a(a + b) + b$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(a + b + c) + 3c - 1 - 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(a + b + c + d) + 6d - 4$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a(a + b + c + d + e) + 10e - 10$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = a(a + b + c + d + e + f) + 15f - 20$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = a(a + b + c + d + e + f + g) + 21g - 35$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = a(a + b + c + d + e + f + g + h) + 28h - 56$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 = a(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 36i - 84$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + j^2 = a(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j) + 45j - 120$$

$$\text{atau } S_{10}^2 = a.S_{10} + j.S_9 - S_8(U_8')$$

$$\text{Jadi, } S_n^2 = a.S_n + n.S_{n-1} - S_{n-2}(U_{n-2}')$$

Bukti 1:

$$a^2 + b^2 = a(b-1) + b(a+1)$$

$$a^2 + b^2 = a.a + ab + b$$

$$a^2 + b^2 = a.a + ab + b$$

$$a^2 + b^2 = a(a + b) + 2$$

Bukti 2:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a.a + b(a+1) + c(a+2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a.a + ab + ac + b + 2c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a.a + ab + ac + c - 1 + 2c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(a + b + c) + 3c - 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(a + b + c) + 3c - 1$$

Bukti 3

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a.a + b(a+1) + c(a+2) + d(a+3)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a.a + ab + ac + ad + d - 2 + 2(d-1) + 3d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a.a + ab + ac + ad + d - 2 + 2d - 2 + 3d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a.a + ab + ac + ad + 6d - 4$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(a + b + c + d) + 6d - 4$$

Bukti 4

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a.a + b(a+1) + c(a+2) + d(a+3) + e(a+4)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + e - 3 + 2(e-2) + 3(e-1) + 4e$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + e - 3 + 2e - 4 + 3e - 3 + 4e$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + 10e - 10$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a(a + b + c + d + e) + 10e - 10$$

Bukti 5

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = a.a + b(a+1) + c(a+2) + d(a+3) + e(a+4) + f(a+5)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + af + f - 4 + 2(f-3) + 3(f-2) + 4(f-1) + 5f$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + af + f - 4 + 2f - 6 + 3f - 6 + 4f - 4 + 5f$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + af + 15f - 20$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = a(a + b + c + d + e + f) + 15f - 20$$

Bukti 6

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = a.a + b(a+1) + c(a+2) + d(a+3) + e(a+4) + f(a+5) + g(a+6)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + af + ag + g - 5 + 2(g-4) + 3(g-3) + 4(g-2) + 5(g-1) + 6g$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + af + ag + g - 5 + 2g - 8 + 3g - 9 + 4g - 8 + 5g - 5 + 6g$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = a.a + ab + ac + ad + ae + af + ag + 21g - 35$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = a(a + b + c + d + e + f + g) + 21g - 35$$

Dengan cara yang sama diperoleh penyederhanaan persamaan kuadrat suku ke n

Cara Menghitung $S_n(Un')$

n	Un'	$S_n(Un')$
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56
7	28	84
8	36	120
9	45	165
10	55	220

Cara lain

$$a^2 + b^2 = 2ab + 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc + 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + ac + bd + cd + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + bd + ce + de + 7$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = ab + ac + bd + ce + df + ef + 9$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = ab + ac + bd + ce + df + eg + fg + 11$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = ab + ac + bd + ce + df + eg + fh + gh + 13$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 = ab + ac + bd + ce + df + eg + fh + gi + hi + 15$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + j^2 = ab + ac + bd + ce + df + eg + fh + gi + hj + ij + 17$$

Bukti 1

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + (-1) + 1$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + (a - b) + 1$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + a - b + 1$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + a + b^2 - b + 1$$

$$a^2 + b^2 = a(a + 1) + b(b - 1) + 1$$

$$a^2 + b^2 = ab + ba + 1$$

$$a^2 + b^2 = 2ab + 1$$

Bukti 2:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (-3) + 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a - 2c + b) + 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a - 2c + b + 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + a + c^2 - 2c + b^2 + b + 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(a + 1) + (c - 2)c + b(b + 1) + 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc + 3$$

Bukti 3:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + ac + bd + cd + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (-5) + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a - 2c + 2b - d) + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a - 2c + 2b - d + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + a + c^2 - 2c + b^2 + 2b + d^2 - d + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(a + 1) + (c - 2)c + b(b + 2) + (d - 1)d + 5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + ac + bd + cd + 5$$

Dengan cara yang sama diperoleh penyederhanaan persamaan kuadrat suku ke n