



BAB 2

SISTEM BILANGAN

2.1 Pengantar

Saat ini teori bilangan jauh lebih kompleks. Beberapa konsep bilangan kadang-kadang memerlukan kedalaman matematis dan logika untuk dapat memahami dan mendefinisikannya. Misalnya: himpunan semua bilangan rasional bisa dibangun secara bertahap, diawali dari himpunan bilangan-bilangan asli. Masalah dalam teori bilangan seperti Teorema Terakhir Fermat baru dapat dipecahkan setelah berumur ratusan tahun. Penerapannya pun lebih banyak pada berbagai ilmu dan teknologi mutakhir (kriptografi). Dalam bab ini akan dikupas konsep bilangan, bilangan dan lambang bilangan, Jenis bilangan, dan operasi bilangan.

2.2 Konsep Bilangan

Menurut Guilberg, 1997 dan Muir, 1965, konsep bilangan meliputi bilangan nyata dan khayal. Bilangan nyata meliputi bilangan nol, bilangan negatif, dan bilangan positif. Bilangan nyata terdiri atas bilangan rasional dan bilangan irasional; bilangan rasional terdiri atas bilat dan pecahan. Bilangan khayal berkembang menjadi bilangan kompleks dan bilangan kuarternion. Perkembangan bilangan khayal dapat dilihat pada Diagram 2.1. Diagram 2.1 merupakan modifikasi dari 2 diagram yang ada dalam buku Muir 1965.

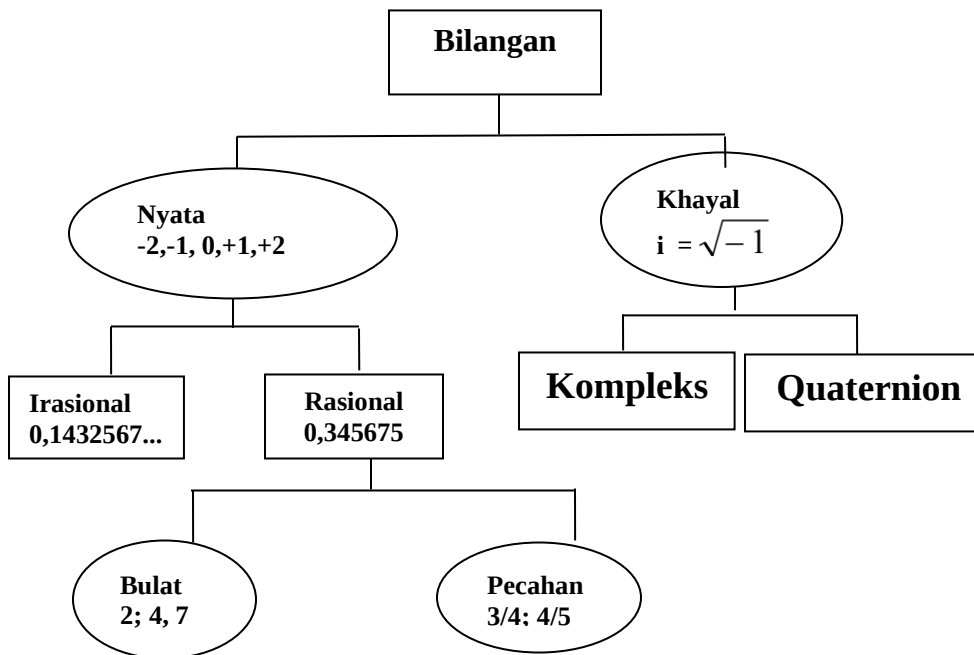


Diagram 2.1 Pembagian Sistem Bilangan

Perbedaan antara kedua jenis bilangan ini terletak pada kandungan positif dan negatif. Bilangan nyata mengandung salah satu sifat secara tegas yaitu positif atau negatif dan tidak kedua-duanya. Bilangan khayal tidak jelas sifatnya, apakah negatif atau positif. Bilangan khayal yang mengandung kedua sifat positif dan negatif disebut bilangan kompleks. Contoh bilangan nyata (5; -5; 7,5; -7,5). Contoh bilangan khayal $\sqrt{-25} = +5i$ atau $-5i$ dan $\sqrt{-56,25} = +7,5i$ atau $-7,5i$. Sulit dibayangkan hasil akhir dari suatu bilangan negatif yang berada dalam pengakar negatif. Karena itu, bilangan sejenis itu disebut bilangan khayal.

Bilangan rasional adalah bagian (hasil bagi) antara dua bilangan, yang berupa bilat, atau berupa pecahan dengan desimal terbatas atau desimal berulang. Contoh bilangan rasional, yaitu: 0,345. Bilangan irasional adalah bagian antara dua bilangan berupa pecahan dengan desimal tak terbatas dan

tak berulang, termasuk bilangan phi dan e. Contoh bilangan irasional, yaitu: 0,166666..., 3,14...; 2,16...; dan lain-lain. Bilat adalah bagian antara dua bilangan merupakan bilat, termasuk 0 (nol). Bilangan pecahan adalah bagian antara dua bilangan yang bagiannya pecahan dengan desimal terbatas atau berulang.

Selain itu, ada jenis bilangan asli, bilangan cacah, dan bilangan prima. Bilangan asli ialah semua bilat positif, tidak termasuk nol. Jika himpunan asli dilambangkan dengan notasi A, maka $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \text{ dan seterusnya} \}$. Bilangan cacah ialah semua bilat positif dan nol. Jika himpunan cacah dilambangkan dengan notasi C, maka $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \text{ dan seterusnya} \}$. Bilangan prima ialah bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan satu dan jika dibagi dengan bilangan selain dirinya sendiri hasilnya tidak bulat. Jika himpunan prima dilambangkan dengan notasi P, maka $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots \text{ dan seterusnya} \}$.

2.3 Bilangan dan Lambang Bilangan

Bilangan, angka, dan nomor merupakan tiga entitas yang berbeda dalam matematika. Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk penghitungan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Dengan kata lain, angka adalah suatu tanda atau lambang yang digunakan untuk melambangkan bilangan. Contohnya, bilangan 8 dapat dilambangkan dengan menggunakan angka Hindu-Arab "8" (sistem angka berbasis 10), "1000" (sistem angka biner), maupun menggunakan angka Romawi 'VIII'. Lambang "8", "1", "0", dan "VIII" yang digunakan untuk melambangkan bilangan disebut sebagai angka. Nomor biasanya menunjuk pada satu atau lebih angka yang melambangkan sebuah bilat dalam suatu

barisan bilat-bilat yang berurutan. Misalnya kata 'nomor 2' menunjuk salah satu posisi urutan dalam barisan bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, ..., dan seterusnya. Dapat disimpulkan bilangan adalah konsep penghitungan dan pengukuran, angka adalah lambang bilangan, dan nomor adalah angka yang berkaitan dengan urutan.

2.4 Jenis Bilangan

Bilangan-bilangan yang paling dikenal adalah bilat ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... dan bilangan-bilangan asli 1, 2, 3, 4, ..., ..., n. Keduanya sering digunakan untuk berhitung dalam aritmatika. Dalam buku-buku teks aljabar, himpunan semua bilat biasanya dinyatakan dengan lambang “Z”, sedangkan himpunan semua bilangan asli biasanya dinyatakan dengan lambang “N”. Setiap bentuk rasio p/q antara dua bilat $/p/$ dan bilat tidak nol $/q/$ disebut bilangan rasional atau pecahan. Himpunan semua bilangan rasional ditandai dengan “Q”.

2.5 Operasi Bilangan

2.5.1 Operasi Bilat

Bilat terdiri atas bilangan cacah (0, 1, 2, ...) dan negatifnya (-1, -2, -3, ...); -0 adalah sama dengan 0 dan tidak dimasukkan lagi secara terpisah. Pada bilat bisa dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian yang masing-masing operasi mempunyai sifat-sifat tertentu.

2.5.1.1 Sifat-sifat operasi bilat

Sistem bilat tercipta sebagai perluasan sistem bilangan cacah untuk mendapatkan sistem bilangan yang tertutup terhadap semua operasi hitung. Perluasan tersebut dilakukan dengan mencari bilangan yang tertutup terhadap

operasi pengurangan. Definisi 1: Sistem bilat terdiri atas himpunan $B = \{?, -2, -1, 0, 1, 2, ?\}$ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian. Untuk a , b , dan c sembarang bilat, berlaku sifat, berikut ini.

1) Sifat Komutatif

Dalam penjumlahan dua bilangan a dan b , perubahan urutan antara keduanya tidak mengubah jumlahan.

$$a + b = b + a \qquad 10 + 5 = 5 + 10$$

Demikian juga untuk perkalian, perubahan urutan perkalian antara dua bilangan tidak mengubah kalian.

$$a \times b = b \times a \qquad 10 \times 5 = 5 \times 10$$

2) Sifat Asosiatif

Dalam penjumlahan tiga bilangan a , b dan c , atau lebih, perubahan cara pengelompokkan bilangan-bilangan tersebut tidak mengubah jumlahan.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (10 + 5) + 15 = 10 + (5+15)$$

Begitu juga dalam perkalian tiga bilangan a , b , dan c , atau lebih, perubahan cara pengelompokkan bilangan-bilangan tersebut tidak mengubah kalian.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \qquad (10 \times 5) \times 15 = 10 \times (5 \times 15)$$

3) Sifat Pembatalan

Jika jumlah a dan c sama dengan b dan c (c adalah bilangan nyata bukan nol), maka a sama dengan b .

$$\text{Jika } a + c = b + c \qquad \text{maka: } a = b$$

Jika kalian a dan c sama dengan b dan c (c adalah bilangan nyata bukan nol), maka a sama dengan b .

$$\text{Jika } a \times c = b \times c$$

$$\text{Maka: } a = b$$

4) Sifat Distributif

Dalam pengalian bilangan a terhadap jumlah $(b + c)$, kaliannya adalah sama dengan jumlah kalian ab dan kalian ac . Dengan kata lain, kalian sebuah bilangan terhadap suatu penjumlahan adalah sama dengan jumlah kalian-kaliannya.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$10(5 + 15) = 10 \cdot 5 + 10 \cdot 15$$

5) Unsur penyama

Bilangan nol merupakan unsur penyama dalam penjumlahan dan pengurangan karena jumlah atau selisih antara suatu bilangan tertentu dan nol adalah bilangan itu sendiri.

$$a \pm 0 = a$$

$$10 + 0 = 10$$

$$10 - 0 = 10$$

Bilangan satu merupakan unsur penyama dalam perkalian dan pembagian karena kalian atau bagian antara suatu bilangan tertentu dan 1 adalah bilangan itu sendiri.

$$a \times 1 = a$$

$$10 \times 1 = 10$$

$$a : 1 = a$$

$$10 : 1 = 10$$

Setiap bilangan nyata mempunyai sebuah lawan penambah. Jumlah antara bilangan tertentu dan lawan penambahnya sama dengan nol

$$a + (-a) = 0$$

$$10 + (-10) = 0$$

Setiap bilangan nyata mempunyai sebuah lawan pengali. Kalian bilangan tertentu terhadap lawan pengalinya sama dengan satu.

$$a \times 1/a = 1$$

$$10 \times 1/10 = 1$$

2.5.1.2 Hubungan perbandingan antar-bilangan

Tanda Ketidaksamaan

Tanda $<$ melambangkan “lebih kecil dari”

Tanda $>$ melambangkan “lebih besar dari”

Tanda $\leq$ melambangkan “lebih kecil dari atau sama dengan” atau “maksimum”

Tanda $\geq$ melambangkan “lebih besar dari atau sama dengan” atau “minimum”

Sifat Perbandingan

Jika $a \leq b$, maka $-a \geq -b$

Jika $a \leq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \leq x.b$

Jika $a \leq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \geq x.b$

Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a+c \leq b+d$

2.5.1.3 Operasi Penjumlahan pada Bilat

$$P + Q = R$$

P = Terjumlah/Tertambah

Q = Penjumlah/Penambah

R = Jumlahan/Tambahan

Secara ringkas dapat ditulis sebagai berikut.

- 1) Jumlah dari dua bilangan positif (+a) dan (+b) adalah sebuah bilangan positif baru (+c) yang nilainya lebih besar

$$(+a) + (+b) = (+c)$$

$$(+10) + (+5) = (+15)$$

- 2) Jumlah dari dua bilangan negatif (-a) dan (-b) adalah sebuah bilangan negatif baru (-c) yang nilainya lebih kecil.

$$b. (-a) + (-b) = (-c)$$

$$(-10) + (-5) = (-15)$$

- 3) Jumlah dari dua bilangan positif (+a) dan bilangan negatif (-b) adalah sebuah bilangan positif (+c) jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b, atau bilangan negatif (-d) jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b.

$$c. (+a) + (-b) = (+c) \text{ jika } |a| > |b|$$

$$(+10) + (-5) = (+5)$$

atau

$$(+a) + (-b) = (-d) \text{ jika } |a| < |b|$$

$$(+10) + (-15) = (-5)$$

- 4) Jumlah dari dua bilangan positif (+a) dan bilangan negatif (-b) adalah sebuah bilangan negatif (-c) jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b, atau bilangan positif (+d) jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b.

$$c. (-a) + (+b) = (+c) \text{ jika } |a| < |b|$$

$$(-10) + (+15) = (+5)$$

atau

$$(-a) + (+b) = (-d) \text{ jika } |a| > |b|$$

$$(-10) + (+5) = (-5)$$

2.5.1.4 Operasi Pengurangan pada Bilat

Definisi

$$P - Q = R$$

P = Berkurang

Q = Pengurang

R = Kurangan

Secara ringkas dapat ditulis sebagai berikut.

- 1) Selisih antara dua bilangan positif (+a) dan (+b) adalah sebuah bilangan positif (+c) jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b, atau bilangan negatif (-d) jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b.

$$(+ a) - (+ b) = (+ c) \text{ jika } |a| > |b|$$

$$(+10) - (+5) = (+5)$$

$$(+ a) - (+ b) = (- d) \text{ jika } |a| < |b|$$

$$(+10) - (+15) = (-5)$$

- 2) Selisih antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$ adalah sebuah bilangan positif $(+c)$ jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b , atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b .

$$(- a) - (- b) = (+ c) \text{ jika } |a| < |b|$$

$$(-10) - (-15) = (+5)$$

$$(- a) - (- b) = (- d) \text{ jika } |a| > |b|$$

$$(-10) - (-5) = (-5)$$

- 3) Selisih antara dua bilangan positif $(+a)$ dan bilangan negatif $(-b)$ adalah sebuah bilangan positif baru $(+c)$.

$$(+a) - (- b) = (+c)$$

$$(+10) - (-5) = (15)$$

- 4) Selisih antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan bilangan positif $(+b)$ adalah sebuah bilangan negatif baru $(-c)$.

$$(-a) - (+b) = (- c)$$

$$(-10) - (+5) = (-15)$$

2.5.1.5 Operasi Perkalian

Definisi

$$\mathbf{A \times B = C}$$

A = Pengali

B = Terkali

C = Kalian

- 1) Kalian antara bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$, serta antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$ adalah sebuah bilangan positif

$$(+c)(+a) \times (+b) = (+c) \quad (+10) \times (+5) = (+50)$$

$$(-a) \times (-b) = (+c) \quad (-10) \times (-5) = (+50)$$

- 2) Kalian antara bilangan positif (+a) dan bilangan negatif (-b), serta antara dua bilangan negatif (-a) dan bilangan positif (+b) adalah sebuah bilangan negatif (-c)

$$(+a) \times (-b) = (-c) \quad (+10) \times (-5) = (-50)$$

$$(-a) \times (+b) = (-c) \quad (-10) \times (+5) = (-50)$$

2.5.1.6 Operasi Pembagian

Definisi

$$A : B = C$$

A = Terbagi

B = Pembagi

C = Bagian

- 1) Bagian antara bilangan positif (+a) dan (+b), serta antara dua bilangan negatif (-a) dan (-b) adalah sebuah bilangan positif (+c)

$$(+a) : (+b) = (+c) \quad (+10) : (+5) = (+2)$$

$$(-a) : (-b) = (+c) \quad (-10) : (-5) = (+2)$$

- 2) Bagian antara bilangan positif (+a) dan bilangan negatif (-b), serta antara dua bilangan negatif (-a) dan bilangan positif (+b) adalah sebuah bilangan negatif (-c)

$$(+a) : (-b) = (-c)$$

$$(+10) : (-5) = (-2)$$

$$(-a) : (+b) = (-c)$$

$$(-10) : (+5) = (-2)$$

2.5.2 Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan adalah bilangan rasional yang tidak bulat. Cara penulisan bilangan pecahan ada dua, yaitu pecahan biasa dan desimal.

Pecahan biasa ditulis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, dan seterusnya. Pecahan desimal ditulis 0,50; 0,75; 0,80; dan seterusnya.

Dua buah pecahan atau lebih, hanya dapat ditambahkan atau dikurangkan apabila mereka memiliki suku pembagi yang sama atau sejenis. Jika suku pembaginya belum sama, maka terlebih dahulu harus disamakan sebelum pecahan-pecahan tersebut ditambahkan dan dikurangkan.

2.5.2.1 Operasi Bilangan Pecahan

Ada empat macam operasi pecahan, yaitu: 1) operasi pemadanan, 2) operasi penjumlahan dan pengurangan, 3) operasi perkalian, dan 4) operasi pembagian.

1) Operasi Pemadanan

Suku-suku dalam sebuah pecahan dapat diperbesar atau diperkecil tanpa mengubah nilai pecahannya, sepanjang kedua sukunya dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

Contoh memperbesar pecahan

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}; \frac{12}{20} = \frac{12 \times 6}{20 \times 6} = \frac{72}{120}$$

Besar pecahan-pecahan $\frac{3}{5}; \frac{12}{20}; \frac{72}{120}$ adalah sepadan

Pembesaran $\frac{3}{5}$ dapat dilakukan hingga tak terbatas

Contoh pemerkecil pecahan, sebagai berikut.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

$$\frac{72}{120} = \frac{72 : 6}{120 : 6} = \frac{12}{20}; \frac{12}{20} : 4 = \frac{3}{5}$$

Besar pecahan-pecahan $\frac{72}{120}; \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ adalah sepadan

Proses di atas merupakan contoh pengecilan pecahan terbatas

2) Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

(1) Operasi Penjumlahan

Penjumlahan dan pengurangan dari dua buah pecahan atau lebih hanya dapat dilakukan jika mereka memiliki suku-suku pembagi yang sama atau sejenis. Jika suku-suku pembagi belum sama maka harus disamakan sebelum dilakukan penjumlahan atau pengurangan. Sedapat mungkin diusahakan pecahan yang disamakan memiliki suku pembagi sama yang terkecil.

Contoh:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \quad \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{ac}{bc} + \frac{b^2}{bc} = \frac{ac + b^2}{bc}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{6}{4} = \frac{9}{24} + \frac{36}{24} = \frac{9 + 36}{24} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$$

atau

Jika suku pembagi pecahan-pecahan merupakan kelipatan satu dengan lainnya maka suku pembagi terbesar yang dipakai sebagai penyama.

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

(3) Operasi Pengurangan

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b} \quad \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5 - 3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd} \quad \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{2.4}{5.4} - \frac{5.1}{5.4} = \frac{8 - 5}{20} = \frac{3}{20}$$

Jika suku pembagi pecahan-pecahan merupakan kelipatan satu dengan lainnya maka suku pembagi terbesar yang dipakai sebagai penyama.

$$\frac{3}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

(3) Operasi Perkalian

$$\frac{a}{x} \times \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$$

$$\frac{10}{4} \times \frac{6}{3} = \frac{60}{12}$$

(4) Operasi Pembagian

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Sumber

Riyanto. 2021. *Menghitung Cepat dan Mudah*. Bengkulu: UPP FKIP UNIB

