

PEMBUKTIAN PERSAMAAN CANTIK: $(N_1 - N_2)^3 = N_1^2 - N_2^2$

Riyanto

Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP Universitas Bengkulu, Bengkulu, 38371A

Email: riyanto_unib@yahoo.com

Abstraks. Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah sama dan ditulis dengan tanda sama-dengan. Dalam matematika dikenal beberapa macam persamaan, di antaranya adalah persamaan linier, kuadrat, pangkat tiga, dan lain-lain. Berdasarkan kajian ditemukan persamaan cantik, yaitu $(n_1 - n_2)^3 = n_1^2 - n_2^2$. Selain itu, juga ditemukan cara mudah menghitung S_n untuk barisan dengan pola

$$\sum_{i=1}^n n^3$$

Kata Kunci: Pembuktian dan persamaan cantik

1. Pendahuluan

Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama-dengan [1 dan 2]. Dalam matematika dikenal beberapa macam persamaan, di antaranya adalah persamaan linier, kuadrat, pangkat tiga, dan lain-lain. Berdasarkan kajian ditemukan persamaan cantik, yaitu $(n_1 - n_2)^3 = n_1^2 - n_2^2$. Apakah persamaan tersebut berlaku untuk semua n ? Pembuktian dimulai dari persamaan linier sebagai berikut.

2. Persamaan Linier

Berdasarkan kajian ditemukan persamaan cantik, yaitu $(n_1 - n_2)^3 = n_1^2 - n_2^2$. Apakah persamaan tersebut berlaku untuk semua n ? Pembuktian dimulai dari jumlah sampai dengan suku ke n (S_n) dari persamaan linier sebagai berikut.

3. Deret = Jumlah sampai dengan suku ke n (S_n)

Berikut disajikan persamaan jumlah sampai dengan suku ke n (S_n) dari bilangan berurutan dengan beda (b) = 1 dan suku awal (a) = 1, dimulai dari $U_n = 1$ sampai dengan $U_n = n$.

1a. $1 = 1$

1b. $1 + 2 = 3$

1c. $1 + 2 + 3 = 6$

1d. $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

1e. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

1f. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

1g. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

1h. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

1i. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

1j. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

1k. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots + \dots + n = (n^2 + n)/2$

Misal: 2, 6, 10, 14, 20,,, a_n

$a_1 = 2 = a$

$$a_2 = 6 = 2 + 4 = a + b$$

$$a_3 = 10 = 6 + 4 = (a + b) + b = a + 2b$$

$$a_4 = 14 = 10 + 4 = (a + 2b) + b = a + 3b$$

$$a_n = a + (n-1)b$$

Jadi rumus suku ke-n dalam barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a_n = a + (n-1)b$$

di mana:

$U_n = a_n$ = Suku ke-n

a_1 = suku pertama

b = beda antarsuku

n = banyaknya suku

4. Deret Aritmetika (Deret Hitung)

Misal: $S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$

$$\underline{S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a + a}$$

$$2 S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots \text{ sebanyak } n$$

$$2 S_n = n(a + U_n)$$

$$2 S_n = n\{a + a + (n-1)b\}$$

$$S_n = n/2\{2a + (n-1)b\}$$

Jika $a = 1$ dan $b = 1$, maka

$$S_n = (n^2 + n)/2$$

Keterangan

S_n = Deret ke-n (jumlah sampai dengan suku ke-n)

5. Pembuktian $(n_1 - n_2)^3 = n_1^2 - n_2^2$

Berdasarkan coba-coba, ditemukan persamaan berikut.

Jumlah bilangan pokok antara ekspresi kiri dan ekspresi kanan nilainya sama dengan pangkat berbeda.

Contoh:

$$2a. 1^3 = 1^2$$

$$2b. 1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = 3^2$$

$$2c. 1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = 6^2$$

$$2d. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2$$

$$2e. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2$$

$$2f. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2 = 21^2$$

$$2g. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2 = 28^2$$

$$2h. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2 = 36^2$$

$$2i. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 45^2$$

$$2j. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10)^2 = 55^2$$

$$2k. 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + n)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + \dots + n^3 = \{(n^2 + n)/2\}^2$$

Persamaan 2a—2k dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$S_n = \sum_{i=1}^n n^3 = \{(n^2 + n)/2\}^2$$

S_n = jumlah sampai dengan suku ke n dari bilangan pokok ekspresi kiri.

Jadi, bilangan pokok ekspresi kanan merupakan jumlah sampai dengan suku ke n dari bilangan pokok ekspresi kiri.

Dengan demikian, kita dapat dengan mudah, menghitung sampai suku ke n (S_n) untuk barisan

dengan pola $\sum_{i=1}^n n^3$

Contoh:

1) Hitung suku ke 100 dari barisan pola $\sum_{i=1}^n n^3$

Jawab:

$$S_{100} = \{(100^2 + 100)/2\}^2$$

$$S_{100} = 5050^2$$

$$S_{100} = 25502500$$

2) Hitung suku ke 1000000 dari barisan pola $\sum_{i=1}^n n^3$

Jawab:

$$S_{1000000} = \{(1000000^2 + 1000000)/2\}^2$$

$$S_{1000000} = 5000005000000^2$$

$$S_{1000000} = 2500005000025000000000000$$

Perhatikan persamaan 2a—2j, substitusikan ekspresi kanan persamaan sebelumnya ke ekspresi kiri berikutnya, misalnya persamaan 2a ke 2b, persamaan 2b ke 2c, dan seterusnya, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$3a. 1^3 = 1^2$$

$$3b. 1^2 + 2^3 = 3^2$$

$$3c. 3^2 + 3^3 = 6^2$$

$$3d. 6^2 + 4^3 = 10^2$$

$$3e. 10^2 + 5^3 = 15^2$$

$$3f. 15^2 + 6^3 = 21^2$$

$$3g. 21^2 + 7^3 = 28^2$$

$$3h. 28^2 + 8^3 = 36^2$$

$$3i. 36^2 + 9^3 = 45^2$$

$$3j. 45^2 + 10^3 = 55^2$$

Langkah berikutnya yaitu memindahkan satu suku yang berpangkat 2 dari ekspresi kiri ke ekspresi kanan. Hasilnya sebagai berikut.

$$4a. 1^3 = 1^2 - 0$$

$$4b. 2^3 = 3^2 - 1^2$$

$$4c. 3^3 = 6^2 - 3^2$$

$$4d. 4^3 = 10^2 - 6^2$$

$$4e. 5^3 = 15^2 - 10^2$$

$$4f. 6^3 = 21^2 - 15^2$$

$$4g. 7^3 = 28^2 - 21^2$$

$$4h. 8^3 = 36^2 - 28^2$$

$$4i. 9^3 = 45^2 - 36^2$$

$$4j. 10^3 = 55^2 - 45^2$$

Suku pertama ekspresi kanan merupakan S_n dan suku kedua ekspresi kanan merupakan S_{n-1} .

Dengan demikian, persamaan 4a—4j dapat disederhanakan, sebagai berikut.

$$n^3 = (S_n)^2 - (S_{n-1})^2$$

6. Pembuktian

$$\begin{aligned}n^3 &= (S_n)^2 - (S_{n-1})^2 \\S_n^2 &= \{(n^2 + n)/2\}^2 \\S_{n-1}^2 &= [(n-1)^2 + (n-1)]/2^2 = \{(n^2 - n)/2\}^2 \\n^3 &= \{(n^2 + n)/2\}^2 - \{(n^2 - n)/2\}^2 \\n^3 &= \frac{1}{4}\{n^4 + 2n^3 + n^2 - n^4 + 2n^3 + n^2\} \\n^3 &= \frac{1}{4}(4n^3) \\n^3 &= n^3 \quad (\square = \text{terbukti})\end{aligned}$$

atau

Persamaan 4a—4j dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}(n_1 - n_2)^3 &= n_1^2 - n_2^2 \\(n_1 - n_2)^3 &= n_1^2 - n_2^2 \\(n_1 - n_2)^2(n_1 - n_2) &= (n_1 + n_2)(n_1 - n_2) \\(n_1 - n_2)^2 &= (n_1 + n_2) \\ \text{Jika } n_1 &= S_n = (n^2 + n)/2 \text{ dan } n_2 = S_{n-1} = (n^2 - n)/2, \text{ maka} \\[(n^2 + n)/2 - (n^2 - n)/2]^2 &= \{(n^2 + n)/2 + (n^2 - n)/2\} \\n^2 &= n^2 \quad (\square = \text{terbukti})\end{aligned}$$

6. Simpulan dan Rekomendasi

6.1 Simpulan

Berdasarkan kajian diperoleh bukti bahwa $(n_1 - n_2)^3 = n_1^2 - n_2^2$, jika $n_1 = S_n$ dan $n_2 = S_{n-1}$.

Selain itu, juga ditemukan cara mudah menghitung S_n untuk barisan pangkat tiga ($\sum_{i=1}^n n^3$)

6.2 Rekomendasi

Berdasarkan hasil kajian disarankan untuk melanjutkan pembuktian kajian persamaan-persamaan unik dari bilangan pangkat ≥ 3 .

Sumber Pustaka

- [1] Riyanto. 2011. *Keindahan Matematika*. Armandelta Selaras. Jakarta. (Proses terbit)
- [2] Riyanto. 2011. Persamaan-persamaan unik untuk pangkat $n \leq 5$. Prosiding Seminar Nasional Matematika V, 2011. Universitas Katolik Parahyangan.